D-IV/ MOUVEMENT DANS L'ESPACE
الــحــركــات فــي الــفضــاء

Pour étudier le mouvement d'un point matériel dans l'espace, et qui est caractérisé par trois dimensions, on fait appel, en général, aux coordonnées cylindriques et aux coordonnées sphériques.

1/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES
(دراسة الحركة بالإحداثيات الأسطوانية)

❖ **Position du mobile :** (figure 4.14)

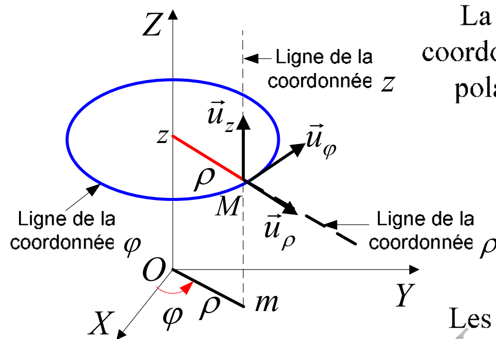


Fig 4.14 : Base des coordonnées cylindriques

La position du mobile M est indiquée par sa coordonnée algébrique z et ses deux coordonnées polaires ρ et φ de sa projection m sur le plan XOY

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} \rho(t) \\ \varphi(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$

Les relations entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\varphi.\vec{i} + \sin\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases} \quad (4.39)$$

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \quad \textbf{(4.40)}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\rho.\cos\varphi + \vec{j}.\rho.\sin\varphi + \vec{k}.z \quad \textbf{(4.41)}$$

L'étudiant peut remarquer l'équivalence entre cette dernière expression et la relation déjà vue **(6.3)**.

- Le déplacement élémentaire est donné par l'expression :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad \textbf{(4.42)}$$

❖ **Vitesse du mobile :**

Il suffit de dériver le vecteur position, exprimé en coordonnées cylindriques, par rapport au temps, pour tomber sur le vecteur vitesse. Remarquons que le rayon polaire ρ

est une fonction du temps. Le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$ est lui aussi variable avec le temps. Seul $\vec{u}_z = \vec{k}$ est constant.

$$\vec{r} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \vec{u}_z \frac{dz}{dt}$$

En se rappelant de la relation (4.25) relative aux dérivées de $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Remarquons que la vitesse a trois composantes : **radiale** $(\vec{v}_r)$, **transversale** $(\vec{v}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{v}_z)$.

Le module de la vitesse en coordonnées cylindriques est donné par l'expression :

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}} \qquad \textbf{(4.44)}$$

❖ **Accélération du mobile :**

En continuant l'opération de dérivation par rapport au temps nous arrivons à l'expression de l'accélération du mobile :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}.\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\dot{\varphi}.\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

En utilisant la notation de Newton, et en se rappelant de la relation **(4.25)**, nous obtenons l'expression finale de l'accélération exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + (\rho.\ddot{\varphi} + 2.\dot{\rho}.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.45)}$$

La même expression peut être écrite sous la forme :

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}^2).\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2.\dot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z} \qquad \textbf{(4.46)}$$

Si $z = 0$ et $\rho = R = C^{te}$, réapparaît alors la relation (31.4) de l'accélération du mouvement circulaire uniforme.

Remarquons que l'accélération, comme la vitesse, a trois composantes : **radiale** $(\vec{a}_r)$, **transversale** $(\vec{a}_\varphi)$ et **azimutale** $(\vec{a}_z)$.

2/ ETUDE DU MOUVEMENT EN COORDONNEES SPHERIQUES

(دراسة الحركة بالإحداثيات الكروية)

❖ **Position du mobile :** (Figure 4.15)

Dans ce système la position du mobile est définie par la relation :

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{array}\right. \qquad \boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r} \qquad \textbf{(4.47)}$$

Rappelons les deux relations **4.17** et **4.18** entre les vecteurs de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ et ceux de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u}_r = \sin\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\vec{j} + \cos\theta.\vec{k}$$
$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi.\vec{i} + \cos\varphi.\vec{j}$$
$$\vec{u}_\theta = \cos\theta.\cos\varphi.\vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\vec{j} - \sin\theta.\vec{k}$$

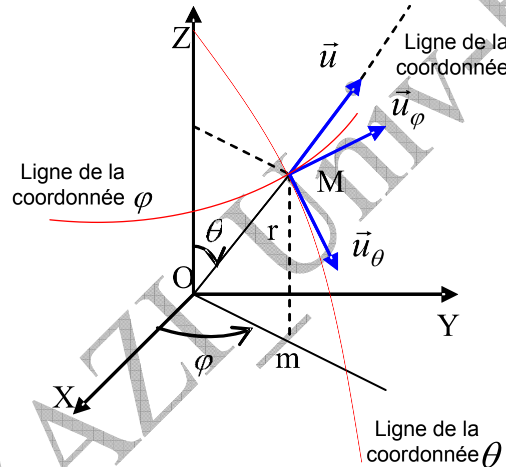


Fig 4.15: Base des coordonnées sphériques

- Le déplacement élémentaire est donné par la relation :

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + (r\sin\theta.d\varphi)^2 + (rd\theta)^2} \qquad \textbf{(4.48)}$$

L'étudiant ne doit pas apprendre les lettres mais leurs sens. Remarquez que $\varphi = (OX, Om)$ et $\theta = (OZ, OM)$, mais vous pouvez trouver l'inverse de cela dans d'autres références.

❖ **Vitesse du mobile :**

Dérivons le vecteur position en coordonnées sphériques par rapport au temps :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\vec{u}}$$

Dérivons le vecteur $\vec{u}$, puis organisons la nouvelle expression pour obtenir à la fin :

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\left[\underbrace{\vec{i}.\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta}_{\vec{u}_\theta}\right] + \dot{\varphi}\sin\theta\left[\underbrace{-\vec{i}.\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi}_{\vec{u}_\varphi}\right]$$

C'est-à-dire : $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta.\vec{u}_\varphi$

Par remplacement on obtient l'expression finale de la vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + (r\sin\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi \qquad \textbf{(4.49)}$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ qui dépendent de la position du mobile, donc du temps. Elle est définie par les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, qui nous permettent d'arriver aux valeurs algébriques v , v_θ et v_φ des composantes sphériques du vecteur vitesse et de là, la détermination du vecteur vitesse.

- **Accélération du mobile :**

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on arrive à l'expression du vecteur accélération, soit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}.\vec{u}_r + (r\sin\varphi)\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi\right]$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2{}_r + a^2{}_\theta + a^2{}_\varphi}$$

Nous donnons ci après l'expression finale du vecteur accélération, l'**étudiant** doit être en mesure de s'assurer du résultat :

$$\begin{aligned}\vec{a} = &(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2 - r.\dot{\varphi}^2.\sin^2\theta).\vec{u}_r + \\ &(r.\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} - r.\dot{\varphi}^2.\sin\theta.\cos\theta).\vec{u}_\theta + \\ &(r.\ddot{\varphi}.\sin\theta + 2\dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta + 2r.\dot{\varphi}.\dot{\theta}.\cos\theta)\vec{u}_\varphi\end{aligned} \qquad \textbf{(4.50)}$$

Là aussi, connaissant les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ on arrive aux expressions algébriques a , a_θ et a_φ des composantes du vecteur accélération et par conséquent à la détermination du vecteur $\vec{a}$.

Exemple 4.9 :

Le mouvement d'un point matériel M est défini en coordonnées cylindriques par les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et par l'angle polaire θ tels que $\overrightarrow{OM} = a.\vec{u}_\rho + bt.\vec{k}$; $\theta = ct^2$; sachant que a, b, c sont des constantes positives.

1/ Calculer la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

2/ Calculer le rayon de courbure après un tour complet autour de l'axe OZ .

Réponse :

1/ Pour obtenir le vecteur vitesse on dérive le vecteur accélération :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(a\vec{u}_\rho + bt\vec{k}\right)$$

$$\vec{v} = a\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + b\vec{k} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v} = a.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + b\vec{k} \\ \theta = ct^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 2ct \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 2act\vec{u}_\theta + b\vec{k}}$$

Le module du vecteur vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}}$$

En dérivant le vecteur vitesse on obtient le vecteur accélération :

$$\gamma = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2act.\vec{u}_\theta + b\vec{k}) \Rightarrow \gamma = 2ac\frac{d}{dt}(t.u_\theta) \Rightarrow \gamma = 2ac\left[t.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_\theta.1\right]$$

$$\gamma = 2ac\left[-t.\dot{\theta}.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \gamma = 2ac\left[-t.2ct.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \Rightarrow \boxed{\gamma = 2ac\left[-2ct^2.\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right]}$$

Son module est :

$$\boxed{\gamma = 2ac\sqrt{4c^2t^4 + 1}}$$

2/ Calcul du rayon de courbure.

Calculons d'abord la durée nécessaire pour que le mobile effectue un tour complet :

$$\theta = 2\pi = ct^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta}{c}} = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$$

Remplaçant ensuite le temps par son expression que nous venons de trouver dans l'expression de l'accélération normale et enfin, calculons le rayon de courbure :

Nous laissons à l'étudiant le soin de réaliser ce calcul de longue haleine pour aboutir à la fin au résultat suivant :

$$R = \frac{v^2}{\gamma_N} \quad ; \quad \gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2} \; ;$$

$$\boxed{\gamma_T = \frac{dv}{dt} = \frac{4a^2c^2t}{\sqrt{4a^2c^2t^2 + b^2}} \neq \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} !!!!!}$$

$$\boxed{\gamma_N = 2ac\frac{\sqrt{16a^2c + b^2}}{\sqrt{a^2c^2t^2 + b^2}}}$$

$$R_{(t)} = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(4a^2c^2t^2 + b^2\right)^{3/2}}{2ac(16a^2c^4t^6 + 4c^2b^2t^4 + b^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{R\left(\sqrt{\frac{2\pi}{c}}\right) = \frac{\left(8\pi a^2c^2t^2 + b^2\right)^{3/2}}{2ac(128a^2c\pi^3 + b^2\left(1 + 16\pi^2\right))^{1/2}}}$$